

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОЛОГІСНОГО РЕЖИМУ СТІНКИ ЗІ ЗМІННИМИ ТЕПЛОФІЗИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

*Статтю присвячено розробленню цифрового методу розрахунку нестационарних теплових і вологісних режимів плоских стінок в умовах змінних теплофізичних характеристик матеріалів. Результати досліджень можуть застосовуватися для аналізу теплового й вологісного режиму огорожувальних конструкцій та будівельних матеріалів.*

**Ключові слова:** теплопровідність, математична модель, огорожуючі конструкції.

**Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими та практичними завданнями.** При розгляді таких задач, як визначення вологісного режиму будівельних конструкцій, їх промерзання і відтавання, аналізу вологісного режиму будівель необхідно визначати температури й вологовміст на поверхні та всередині цих будівельних конструкцій у будь-який момент часу.

Необхідно також урахувати, що більшість теплофізичних характеристик матеріалів суттєво залежать від температури, вологості й змінюються з плином часу. До таких змінних характеристик матеріалів будівельних конструкцій належать: густина, теплопровідність, теплоємність, відносна пароемність тощо. Крім того, багато будівельних конструкцій багат шарові та їх характеристики залежать від взаємного розташування шарів.

Розв'язання цих задач потребує врахування змін теплофізичних характеристик матеріалів під час розрахунку їх температурного та вологісного режимів. Причому температурний режим у багатьох випадках визначає теплофізичні характеристики матеріалу.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання цієї проблеми та на які спираються автори, виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття.** Аналітичне дослідження цих задач наштовхується на значні труднощі. Для найпростіших випадків відомі лише окремі наближені аналітичні розв'язки [1, 2, 3, 4].

Одним з видів цих задач є задачі нелінійної теплопровідності. Зазвичай для таких задач немає формул, що дають точне розв'язання, тому на практиці застосовують переважно наближені розв'язки. Методи можна

розділити на аналітичні та цифрові. До аналітичних можна віднести метод інтегральних перетворень Лапласа і варіаційні методи лінеаризації.

Багато існуючих цифрових математичних моделей розроблені за умови, що вказані фізичні величини є постійними [5, 6, 7, 8, 9]. Аналіз їх застосування в умовах змінних теплофізичних характеристик матеріалів показує, що це може призводити до значних помилок.

У [5] розглянуто постановку цієї задачі для багат шарової стінки методом кінцевих різниць. Важливою проблемою цього методу є жорсткий зв'язок між координатним кроком та часовим інтервалом. Якщо температуропровідність шарів різна (або змінюється), то для дотримання постійного інтервалу часу необхідно змінювати координатний крок. Це суттєво ускладнює процес розрахунку.

Таким чином, для розв'язання задач нестационарного температурного та вологісного режимів в умовах змінних теплофізичних характеристик матеріалів необхідно вдосконалити існуючий метод розрахунку. Важливо також забезпечити незалежність координатного і часового кроків між собою й від теплофізичних характеристик матеріалу.

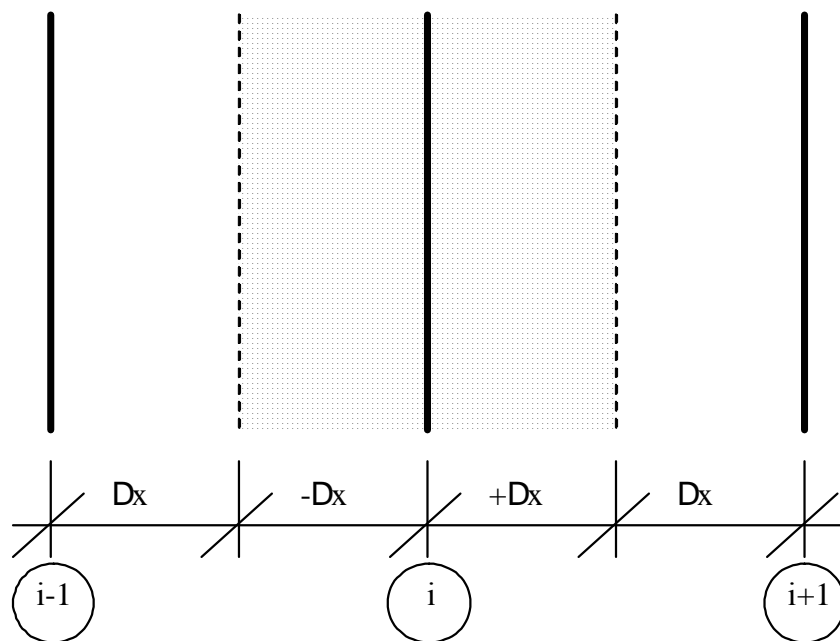
**Формулювання цілей статті (постановка завдання).** Для розв'язання раніше вказаних задач необхідно вдосконалити існуючу математичну модель шляхом урахування змінності теплофізичних характеристик матеріалу як по товщині матеріалу, так і з часом.

**Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.** Розглянемо одношарову плоску стінку (рис.1). Для знаходження розподілу температур усередині цієї стінки розділимо її паралельними площинами на ряд шарів, застосувавши крок  $\Delta x$ . Будемо вважати, що в межах одного шару теплофізичні характеристики матеріалу стінки в цей момент часу постійні, а масу масиву, обмеженого кроком  $\pm \Delta x$ , зосереджено в площині цього шару.

Для зовнішньої стіни будівлі, при граничних умовах 3-ого роду, згідно з [10], отримаємо систему  $n$  рівнянь з відповідною кількістю невідомих температур:

$$\begin{aligned}
 c_1 \Delta x_1 r_1 \frac{dt_1}{dt} &= a_B (t_B - t_1) - \frac{(t_1 - t_2)}{\frac{\Delta x_1}{l_1} + \frac{\Delta x_2}{l_2}} + q_{V(1)} \Delta x_1 \\
 2c_i \Delta x_i r_i \frac{dt_i}{dt} &= \frac{(t_{i-1} - t_i)}{\frac{\Delta x_{i-1}}{l_{i-1}} + \frac{\Delta x_i}{l_i}} - \frac{(t_i - t_{i+1})}{\frac{\Delta x_i}{l_i} + \frac{\Delta x_{i+1}}{l_{i+1}}} + q_{V(i)} \Delta x_i, \\
 c_n \Delta x_n r_n \frac{dt_n}{dt} &= \frac{(t_{n-1} - t_n)}{\frac{\Delta x_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{\Delta x_n}{l_n}} - a_3 (t_n - t_3) + q_{V(i)} \Delta x_n
 \end{aligned} \tag{1}$$

де  $c_i$  - теплоємність  $i$ -ого шару матеріалу огорожувальної конструкції, Дж/(кг·°C);  $t_1, t_2, \dots, t_i$  - температура відповідного шару огорожуючої конструкції, °C;  $\lambda_i$  - теплопровідність  $i$ -ого шару матеріалу, Вт/(м·°C);  $q_{V(i)}$  - питоме об'ємне джерело теплової енергії, Вт/м<sup>3</sup>;  $a_B$  - коефіцієнт конвективного теплообміну біля внутрішньої поверхні, Вт/(м<sup>2</sup>·°C);  $t_B$  - температура внутрішнього повітря, °C;  $a_3$  - коефіцієнт теплообміну біля зовнішньої поверхні огорожуючої конструкції, Вт/(м<sup>2</sup>·°C);  $t_3$  - температура зовнішнього повітря, °C. Визначення розподілу температур в товщі стінки є базовою умовою для виконання подальших розрахунків, наприклад з визначення вологості матеріалів цієї конструкції.



**Рис. 1. Одношарова плоска стінка**

Аналогічним чином можна скласти математичну модель для знаходження розподілу вологи всередині стінки (рис.1). В її основі лежить диференційне рівняння дифузії водяної пари в сорбційному середовищі [5]

$$\xi\rho \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial e}{\partial x} \right), \quad (2)$$

де  $x$  – відносна пароемність матеріалу, г/кг;  $\rho$  - густина матеріалу, кг/м<sup>3</sup>;  $e$  - парціальний тиск, Па;  $z$  - час переміщення водяної пари, с;  $\mu$  – коефіцієнт паропроникності матеріалу, г/(м·с·Па);  $x$ -просторова координата, м.

Для розрахунку огорожуючих конструкцій будівель рівняння (2) необхідно доповнити граничними умовами 3-ого роду [11]. Ці граничні умови біля внутрішньої та зовнішньої поверхонь зовнішньої стіни можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{\partial e_{1,z}}{\partial x} &= \beta_B (e_B - e_{1,z}) \\ \mu_n \frac{\partial e_{n,z}}{\partial x} &= -\beta_3 (e_{n,z} - e_3) \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\mu_1, \mu_n$  - коефіцієнт паропроникності, відповідно внутрішнього і зовнішнього шару конструкції,  $\text{г}/(\text{м}\cdot\text{с}\cdot\text{Па})$ ;  $\beta_B, \beta_3$  - коефіцієнт вологообміну біля внутрішньої та зовнішньої поверхонь,  $\text{г}/(\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{Па})$ ;  $e_B, e_3$  - парціальний тиск водяної пари в повітрі, відповідно з внутрішнього й зовнішнього боку стінки, Па;  $e_1, e_n$  - парціальний тиск водяної пари, відповідно на внутрішній та зовнішній поверхнях конструкції, Па.

З урахуванням усього раніше зазначеного отримаємо таку систему  $n$  рівнянь для знаходження розподілу парціального тиску водяної пари всередині стінки:

$$\begin{aligned} (Dx_1 \gamma_1 \frac{x_1}{E_1}) \frac{De_{1,z}}{Dz} &= \beta_B (e_B - e_1) - \frac{(e_1 - e_2)}{\frac{Dx_1}{\mu_1} + \frac{Dx_2}{\mu_2}} \\ (2Dx_i \gamma_i \frac{x_i}{E_i}) \frac{De_{i,z}}{Dz} &= \frac{(e_{i-1} - e_i)}{\frac{Dx_{i-1}}{\mu_{i-1}} + \frac{Dx_i}{\mu_i}} - \frac{(e_{i,z} - e_{i+1,z})}{\frac{Dx_i}{\mu_i} + \frac{Dx_{i+1}}{\mu_{i+1}}}, \\ (Dx_n \gamma_n \frac{x_n}{E_n}) \frac{De_{n,z}}{Dz} &= \frac{(e_{n-1} - e_n)}{\frac{Dx_{n-1}}{\mu_{n-1}} + \frac{Dx_n}{\mu_n}} - \beta_3 (e_{n,z} - e_3) \end{aligned} \quad (4)$$

де  $E$  - парціальний тиск водяної пари на лінії насичення, Па;  $e_i$  - парціальний тиск в  $i$ -ому шарі конструкції, Па.

Відносну пароемість матеріалу можна визначити за формулою,  $\text{г}/\text{кг}$ ,

$$x_i = 1000 \frac{d\omega_i}{df_i}, \quad (5)$$

де  $\omega_i$  - вагова вологість  $i$ -ого шару матеріалу, %;  $\varphi_i$  - відносна вологість повітря, %. Коефіцієнт вологообміну  $\beta_B$  залежить від температури, вологості, рухливості повітря біля поверхні. В умовах природної конвекції його можна розрахувати за формулою [5],  $\text{г}/(\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{Па})$

$$\beta_B = 1,192 \cdot 10^{-8} \Delta t^{1/3} \Delta e^{2/5}, \quad (6)$$

де  $\Delta t$  - різниця температур між повітрям і поверхнею огорожуючої конструкції,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $\Delta e$  - різниця парціальних тисків у повітрі та на поверхні стінки, Па.

За [12] парціальний тиск насиченої водяної пари в Па, яка міститься в повітрі, може апроксимуватися такою залежністю:

$$E = 479 + (11,52 + 1,62x)^2. \quad (7)$$

Питому кількість водяної пари, що переміщується з одного шару конструкції в інший, визначаємо за формулою,  $\text{г}/\text{м}^2$

$$m_i = (e_{i-1} - e_i) \times D_z \times \frac{1}{\frac{Dx_{i-1}}{\eta_{-1}} + \frac{Dx_i}{\eta}} \quad (8)$$

Одержану систему диференційних рівнянь розв'язують за допомогою цифрових методів, наприклад методом Рунге–Кутта 4-ого порядку [6, 13]. Важливою особливістю запропонованої математичної моделі є те, що всі її теплофізичні характеристики ( $a_B, a_3, l_i, c_i, r_i, q_{V(i)}, E_b, \xi_i$ ) можуть визначатися як функції температури, вологовмісту, часу та координати  $X$ . Крім того, її перевагою є можливість розбивки конструкції на бажану кількість шарів різної товщини. Це дозволяє застосовувати запропоновану математичну модель для визначення температурних та вологісних режимів багатошарових огорожувальних конструкцій (в умовах ідеального теплового контакту між шарами).

### **Висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі**

Отримана математична модель дає можливість розраховувати нестационарні температурні та вологісні режими плоских стінок в умовах змінних теплофізичних характеристик матеріалів. Наступним етапом буде порівняння результатів розрахунку з відомими дослідженнями інших авторів.

### *Література*

1. Лыков А. В. *Теория теплопроводности* / А. В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 599с.
2. Мачинский В.Д. *Теплотехнические основы строительства* / В. Д. Мачинский. – М.: Гос. издат. строит. литер. , 1949. – 326с.
3. Мачинский В.Д. *Теплопередача в строительстве* / В. Д. Мачинский. – М.:Гос. издат. строит. литер. , 1939. – 343с.
4. Цой П. В. *Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса* / П. В. Цой. – М.: Энергия, 1971. – 38 с.
5. Богословский В.Н. *Строительная теплофизика (теплофизические основы отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха): учебник для вузов/ В. Н. Богословский – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1982. – 415с.*
6. Демидович Б. П. *Численные методы анализа* / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. –М.: Физматгиз, 1963. – 400с.
7. Исаченко В. П. *Теплопередача* / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. –М.–Л.: Энергия, 1965. – 424с.
8. Кутний Б.А. *Математична модель для регулювання відпуску теплоти в умовах нестационарного теплового режиму опалюваних будівель* / Б. А. Кутний // *Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво) / Полт. держ. техн. ун-т ім. Юрія Кондратюка. – Полтава, 1998.– Вип.2.– С.110–119.*

9. Строй А.Ф. Управление тепловым режимом зданий и сооружений / А. Ф. Строй. – К.: Вища шк., 1993. –155с.

10. Кутний Б.А., Борщ О.Б. Математична модель теплопровідної стінки зі змінними теплофізичними характеристиками// Комунальне господарство міст: Науково-техн. зб. Вип. 97.– X: ХНАМГ, 2011.– С.149-155.

11. Фокин К. Ф. Строительная теплотехника ограждающих конструкций частей зданий / К. Ф. Фокин. – М.: Стройиздат, 1973. – 287 с.

12. Богословский В. Н. Кондиционирование, вентиляция и хладоснабжение: учебник для вузов/ В. Н. Богословский, О. Я. Кокорин, Л.В. Петров; под. ред. Н. Богословского. – М.: Высш. школа, 1982. – 415с.

13. Канторович Л. В. Методы приближенного решения уравнений в частных производных / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – Л.,М.: ОНТИ НКТИ СССР, 1936. – 528 с.

Надійшла до редакції 20.11.2012

© Б. А. Кутний, А. О. Борисюк

**УДК 697.14.001.24:536.24**

Б. А. Кутний, к.т.н., доц.,  
А. О. Борисюк, аспірантка

Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВЛАЖНОСТНОГО РЕЖИМА СТЕНКИ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК**

*Статья посвящена разработке численного метода расчёта нестационарных тепловых и влажностных режимов плоских стенок в условиях переменных теплофизических характеристик материалов. Результаты исследований могут использоваться для анализа теплового и влажностного режима ограждающих конструкций и строительных материалов.*

**Ключевые слова:** теплопроводность, математическая модель, ограждающие конструкции.

**UDC 697.14.001.24:536.24**

*B. A. Kytyny, Ph. D., Associate Professor,  
A. O. Borisyuk, Post-graduate*

*Poltava National Technical University named after Yuri Kondratyuk*

## **MATHEMATICAL MODEL OF HEAT AND HUMIDITY CONDUCTING WALLS IN VARIABLE THERMAL PROPERTIES**

*Article is dedicated to the development of the numerical method of calculation of the nonstationary thermal and humidity conditions of flat walls under the conditions of the variable thermophysical characteristics of materials. The results of studies can be used for the analysis of the thermal and humidity conditions of the enclosing constructions and the building materials.*

**Keywords:** *thermal conductivity, mathematical model, the enclosing constructions.*