

*О. Г. Маслов, д. т. н., проф.  
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського  
М. П. Нестеренко, к. т. н., доц.,  
П. О. Молчанов, асистент  
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРУ ГОРИЗОНТАЛЬНО НАПРАВЛЕНИХ КОЛИВАНЬ КАСЕТНОЇ УСТАНОВКИ**

*У статті визначено раціональні параметри вібраційного ущільнення з урахуванням виникання напружено-деформованого стану у виробі.*

*Ключові слова:* бетонна суміш, частота коливань, касетна установка, форма.

**Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.** Досить значного поширення при формуванні залізобетонних виробів набуло розроблене у Полтавському національному технічному університеті імені Юрія Кондратюка вібраційне обладнання з просторовими коливаннями робочого органа [1, 2], вдосконалення котрого може проводитися на підставі аналітичних досліджень з урахуванням фізико-механічних характеристик ущільнюваного середовища і визначенням на їхній основі раціональних параметрів вібраційної площадки й режимів вібраційної дії.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання цієї проблеми та на які спираються автори, виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття.** На характер коливань вібраційної касетної установки з горизонтально направленими коливаннями, що використовується для формування бетонних виробів, значно впливають фізико-механічні характеристики ущільнюваних бетонних сумішей, величина й направлення вібраційної дії та конструктивні особливості касетної установки. Правильне врахування сил опору бетонних сумішей, що виникають при вібраційному формуванні багато в чому визначає ефективність ущільнення, точність установлення закону коливань рухомої рами й форми установки, вибору її конструктивних параметрів і технологічних режимів вібраційної дії.

У розрахунках вібраційного обладнання для формування залізобетонних виробів використовують різноманітні підходи до складення математичних моделей, про що свідчать публікації різних років. Відомі математичні моделі враховують бетонну суміш як тверде тіло, часткова маса якої додається до маси робочого органа коливальної системи [1, 7]. Такі моделі не враховують реологічні властивості бетонної суміші, які

змінюються в процесі її ущільнення. Їх можна використовувати для попередніх наближених розрахунків.

У математичних моделях [3 – 10] ураховують сили опору з боку ущільнюваної бетонної суміші на віброустановку при формуванні бетонних виробів при горизонтально направлених коливаннях, але в них досліджується ущільнення бетонних сумішей у формах, протилежні борти яких розташовані на значній відстані, та не враховують вплив коливання пластин на ущільнення виробів.

У наш час недостатньо вивчена дія сил опору з боку ущільнюваної бетонної суміші на касетну установку з горизонтально направленими коливаннями при формуванні малогабаритних бетонних виробів, що не дозволяє досить точно визначити необхідні режими вібраційної дії й параметри вібраційної касетної установки.

**Формулювання цілей статті (постановка завдання).** Метою цієї роботи є дослідження характеру горизонтально направлених коливань касетної установки.

**Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.** Для визначення характеру взаємодії вертикальних бортів касетної установки з ущільнюваною бетонною сумішшю в горизонтальному напрямі виділимо елементарну ділянку касетної форми, що складається лише з одного формуючого відсіку, і дослідимо динамічну систему (рис. 1) взаємодії вставних вертикальних пластин цього відсіку касетної форми з формованою бетонною сумішшю. Цей відсік касетної форми, що складається з двох уставних вертикальних пластин, закріплених на подовжніх бортах касетної форми і днища, заповнений ущільнюваною бетонною сумішшю. У цій динамічній системі бетонна суміш представлена у вигляді системи з розподіленими параметрами. Модель реології ущільнюваної суміші показана на рисунку 2. Вважаємо, що на виділений відсік касетної форми діє збудження у вигляді елементарної вимушуючої сили  $Q_j \sin Wt$ . Тут  $Q_j$  – амплітуда елементарної вимушуючої сили;  $W$  – кутова частота вимушених коливань;  $t$  – час.

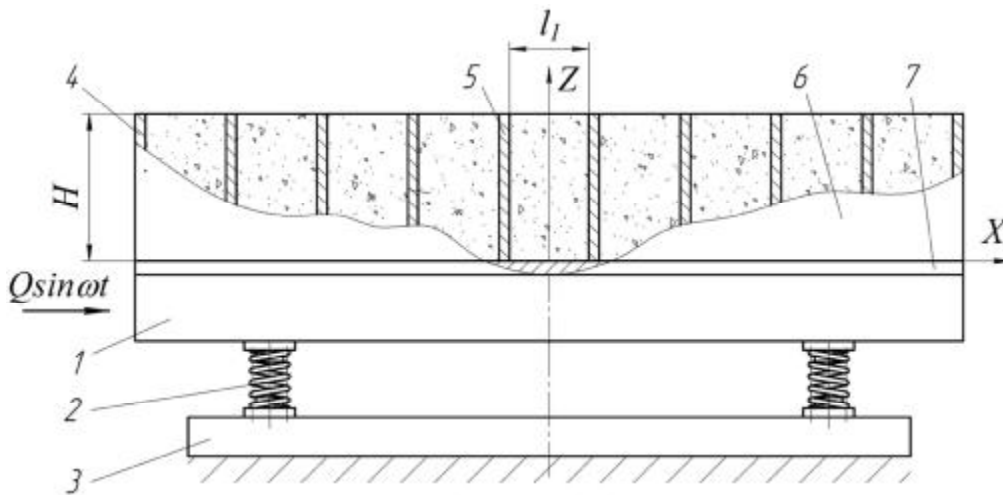
Виходячи з представленої розрахункової моделі динамічної системи, диференціальне рівняння руху ущільнюваної бетонної суміші у виділеному відсікові касетної форми може бути описане таким хвильовим рівнянням коливань [8, 11]:

$$E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + h \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

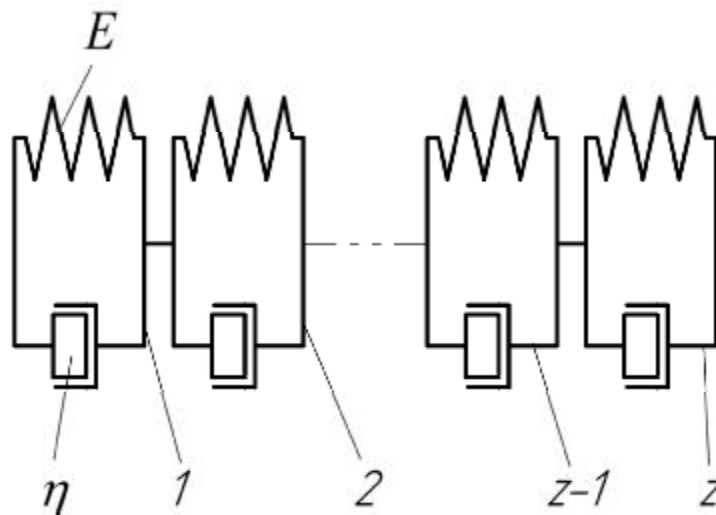
де  $u$  і  $x$  – ейлерова і лагранжова координати;

$E$  і  $h$  – динамічні модулі відповідно пружної деформації та непружного опору ущільнюваної бетонної суміші;

$\gamma$  – щільність бетонної суміші.



**Рис. 1.** Розрахункова схема динамічної системи «віброустановка – бетонна суміш» при горизонтально направлених коливаннях: 1 – рухома рама; 2 – пружні опори; 3 – опорна рама; 4 – форма з бетонною сумішшю; 5 – вставні вертикальні пластини відсіків форми; 6 – подовжні борти форми; 7 – днище форми



**Рис. 2.** Реологічна модель бетонної суміші: 1, 2...  $z - 1$ ,  $z$  - елементарні складові моделі реології

Розв'язок хвильового рівняння коливань (1) відшукуємо за таких граничних умов:

$$- m_j \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} - c_j u(0,t) + EF_j \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + hF_j \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x \partial t} = - Q_j \sin \omega t; \quad (2)$$

$$u(0,t) = u(l_1,t), \quad (3)$$

де  $m_j$  – елементарна маса касетної форми, що припадає на виділений відсік, у якому ущільнюється бетонна суміш  $m_j = \frac{m}{n}$  ;

$m$  – маса касетної форми;

$n$  – кількість елементарних відсіків касетної форми віброустановки, у яких ущільнюється бетонна суміш;

$c_j$  – величина жорсткості пружних опор у горизонтальному напрямі, що припадає на один елементарний відсік касетної форми;

$F_j$  – площа взаємодії переднього торця відсіку форми з бетонною сумішшю;

$l_1$  – відстань між вставними вертикальними пластинами елементарного відсіку касетної форми.

Для розв'язання рівняння (1) представимо функцію уявною частиною комплексної функції [8]

$$u(x,t) = I_m [U(x)e^{i\omega t}], \quad (4)$$

де  $U(x)$  – комплексна амплітуда коливань ущільнюваного середовища

Надалі в рівнянні (4) знак, що вказує на уявну частину комплексної функції, для зручності відкидатимемо.

При підстановці функції (4) у хвильове рівняння коливань (1) отримаємо рівняння відносно комплексної амплітуди коливань ущільнюваного середовища  $U(x)$

$$(E + i\hbar\omega) \frac{\nabla^2 U(x)}{\nabla x^2} + r\omega^2 U(x) = 0 \quad (5)$$

або

$$\frac{\nabla^2 U(x)}{\nabla x^2} + \frac{r\omega^2}{(E + i\hbar\omega)} U(x) = 0. \quad (6)$$

Розв'язок рівняння (6) можна представити в такому вигляді [11]:

$$U(x) = M_1 e^{-i\tilde{k}x} + N_1 e^{i\tilde{k}x}, \quad (7)$$

де  $M_1$  і  $N_1$  – комплексні амплітуди, що визначаються з граничних умов (2) і (3);

$\tilde{k}$  – комплексне хвильове число

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{r\omega^2}{E + i\hbar\omega}}. \quad (8)$$

Помноживши чисельник і знаменник підкорінного виразу (8) на комплексну функцію, зв'язану зі знаменником, представимо хвильове число в такому вигляді:

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{r\omega^2(E - i\hbar\omega)}{E^2 + \hbar^2\omega^2}}. \quad (9)$$

Перетворимо вираз (9) до вигляду

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{r w^2 E}{E^2 + h^2 w^2} \frac{\alpha}{\epsilon} - \frac{i h w \dot{\alpha}}{E \dot{\epsilon}}} = \frac{w}{V_\phi} \sqrt{1 - \frac{i h w}{E}}, \quad (10)$$

де  $V_\phi$  – фазова швидкість поширення вимушуючої сили в ущільнюваному середовищі

$$V_\phi = \frac{E^2 + h^2 w^2}{r E}. \quad (11)$$

Аналізуючи вираз (10), приходимо до висновку, що комплексне хвильове число  $\tilde{k}$  можна представити у вигляді комплексної функції [17]

$$\tilde{k} = k - i a, \quad (12)$$

де  $k$  – хвильове число;

$a$  – коефіцієнт згасання вимушуючої сили.

Прирівняємо вираз (10) і (12), тобто

$$k - i a = \frac{w}{V_\phi} \sqrt{1 - \frac{i h w}{E}}. \quad (13)$$

Піднесемо ліву і праву частини виразу (13) до квадрата

$$k^2 - 2i a k - a^2 = \frac{w^2}{V_\phi^2} \frac{\alpha}{\epsilon} - \frac{i h w \dot{\alpha}}{E \dot{\epsilon}}. \quad (14)$$

Для визначення хвильового числа  $k$  і коефіцієнта згасання збудження  $a$  прирівняємо окремо резову та уявну частини виразу (14)

$$k^2 - a^2 = \frac{w^2}{V_\phi^2}. \quad (15)$$

$$2a k = \frac{w^2}{V_\phi^2} \times \frac{h w}{E}. \quad (16)$$

В отриманій системі рівнянь (15) і (16) позначимо

$$M = \frac{w^2}{V_\phi^2}; \quad N = \frac{w^2}{V_\phi^2} \times \frac{h w}{E}, \quad (17)$$

тоді вона набуде такого вигляду:

$$k^2 - a^2 = M; \quad (18)$$

$$2a k = N. \quad (19)$$

Помножимо ліву і праву частини виразу (18) на  $4k^2$ , а у виразі (19) піднесемо ліву та праву частини до квадрата і, узгоджуючи ці залежності, отримаємо рівняння для визначення хвильового числа  $k$ :

$$4k^4 - 4Mk^2 - N^2 = 0. \quad (20)$$

Розв'язок рівняння (20) матиме такий вигляд:

$$k = \sqrt{\frac{M + \sqrt{M^2 + N^2}}{2}}. \quad (21)$$

Замінюючи в залежності (21) значень  $M$  і  $N$  (2.17), отримаємо формулу для визначення хвильового числа у вигляді

$$k = \frac{w}{V_\phi} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\epsilon} + \sqrt{1 + \frac{h^2 w^2}{E^2} \frac{\ddot{\phi}}{\phi}}}. \quad (22)$$

Підставляючи вирази (22) в залежність (15), отримаємо формулу для визначення коефіцієнта згасання збудження

$$a = \frac{w}{V_\phi} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\epsilon} + \sqrt{1 + \frac{h^2 w^2}{E^2} \frac{\ddot{\phi}}{\phi}}}. \quad (23)$$

На підставі знайдених значень  $k$  і  $a$ , а також залежності (12), приведемо розв'язок (7) рівняння (6) до такого вигляду:

$$U(x) = M_1 e^{-(a+ik)x} + N_1 e^{(a+ik)x}. \quad (24)$$

Використовуючи вирази (24) і (4), знайдемо в загальному вигляді розв'язок хвильового рівняння коливань (1):

$$u(x,t) = [M_1 e^{-(a+ik)x} + N_1 e^{(a+ik)x}] e^{i\omega t}. \quad (25)$$

Підставляючи вираз (25) в граничну умову (3), знайдемо співвідношення між постійними інтегрування  $M_1$  і  $N_1$

$$M_1 = N_1 \frac{1 - e^{-(ik+a)l_1}}{e^{(ik+a)l_1} - 1}. \quad (26)$$

На підставі знайденого співвідношення (26) між постійними інтегрування  $M_1$  і  $N_1$ , розв'язок (25) перетворимо до такого вигляду:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= N_1 \frac{e^{(a+ik)x} - e^{-(a+ik)x} + e^{(a+ik)(l_1-x)} - e^{-(a+ik)(l_1-x)}}{e^{(a+ik)l_1} - 1} e^{i\omega t} = \\ &= N_1 \frac{2sh[a+ik)x] + 2sh[a+ik)(l_1-x)]}{e^{(a+ik)l_1} - 1} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (27)$$

Підставляючи вираз (27) у граничну умову (3), знайдемо постійну інтегрування  $N_1$  у такому вигляді:

$$N_1 = \frac{0,5Q_j(e^{(a+ik)l_1} - 1)}{(c_j - m_j w^2)sh[(a+ik)l_1] + (a+ik)\{1 - ch[(a+ik)l_1]\}(E + i\hbar w)F_j}. \quad (28)$$

Після підстановки знайденого значення постійної інтегрування  $N_1$  у рівняння (27) отримаємо розв'язок рівняння (1), що задовольняє граничні умови (2) і (3) у вигляді

$$u(x,t) = \frac{Q_j \{sh[(a + ik)x] + sh[(a + ik)(l_1 - x)]\} \times e^{i\omega t}}{(c_j - m_j \omega^2) sh[(a + ik)l_1] + (a + ik) \{1 - ch[(a + ik)l_1]\} (E + i\hbar \omega) F_j} \cdot (29)$$

Зі знаменника отриманого виразу (29) винесемо за дужки комплексну функцію  $sh[(a + ik)l_1]$ . Отримаємо

$$u(x,t) = \frac{Q_j \{sh[(a + ik)x] + sh[(a + ik)(l_1 - x)]\}}{sh[(a + ik)l_1]} \cdot \frac{1}{(c_j - m_j \omega^2) + \frac{(a + ik) \{1 - ch[(a + ik)l_1]\} (E + i\hbar \omega) F_j}{sh[(a + ik)l_1]}} e^{i\omega t} \cdot (30)$$

Отриманий вираз (30) описує закон руху ущільнюваного середовища вздовж координати  $X$  у комплексній формі залежно від частоти й амплітуди вимушуючої сили, фізико-механічних характеристик ущільнюваної суміші, товщини ущільнюваного шару суміші та основних параметрів цієї динамічної системи. При  $x=0$  і  $x=l_1$  вираз (30) описує закон руху поперечних вертикальних бортів форми, тобто

$$u(0,t) = u(l_1,t) \frac{Q}{(c_j - m_j \omega^2) + \frac{(a + ik) \{1 - ch[(a + ik)l_1]\} (E + i\hbar \omega) F_j}{sh[(a + ik)l_1]}} e^{i\omega t} \cdot (31)$$

Розкладемо комплексні функції  $sh[(a + ik)l_1]$  і  $ch[(a + ik)l_1]$  у вигляді відомих виразів [28]:

$$sh[(a + ik)l_1] = sh(al_1) \cos kl_1 + i \cdot ch(al_1) \sin kl_1, \quad (32)$$

$$ch[(a + ik)l_1] = ch(al_1) \cos kl_1 + i \cdot sh(al_1) \sin kl_1 \quad (33)$$

і підставимо їх у вираз (31), а потім, перемножуючи чисельник і знаменник доданка у виразі (31) на зв'язану комплексну функцію,  $sh(al_1) \cos kl_1 - i \cdot ch(al_1) \sin kl_1$ , отримаємо

$$u(0,t) = u(l_1,t) = \frac{Q}{(c_j - m_j \omega^2) + (c_{1j} - m_{1j} \omega^2) + i b_{1j} \omega} e^{i\omega t}, \quad (33)$$

де  $m_{1j}$  – приведена маса ущільнюваної бетонної суміші у  $j$  відсіку форми

$$m_{1j} = F_j \frac{(kE + \hbar \omega a) \times sh^2(al_1) \sin 2kl_1 - (aE + \hbar \omega k) \times sh(2al_1) \sin^2 kl_1}{2\omega^2 [sh^2(al_1) + \sin^2 kl_1]}; \quad (34)$$

$c_{1j}$  – приведена жорсткість ущільнюваної бетонної суміші в  $j$  відсіку форми

$$c_{1j} = F_j \frac{[1 - ch(al_1) \cos kl_1] \cos kl_1 \{ (aE - \hbar \omega k) sh(al_1) - (kE - \hbar \omega a) \cdot sh(al_1) \}}{sh^2(al_1) + \sin^2 kl_1}; \quad (35)$$

$b_{1j}$  – приведений коефіцієнт непружного опору ущільнюваної бетонної суміші у  $j$  відсіку форми

$$b_{1j} = F_j \frac{[1 - ch(al_1) \cos kl_1] \{ (aE - hwk) sh(al_1) \sin kl_1 + (kE + hwa) sh(al_1) \cos kl_1 \}}{w \{ sh^2(al_1) + \sin^2 kl_1 \}} + F_j \frac{(kE + hwa) sh(2al_1) \sin^2 kl_1 + (aE + hwk) sh^2(al_1) \sin 2kl_1}{2w \{ sh^2(al_1) + \sin^2 kl_1 \}} \quad (36)$$

З урахуванням залежностей (34), (36) розв'язок хвильового рівняння (1), що задовольняє граничні умови (2) і (3), матиме такий вигляд

$$u(x,t) = \frac{Q_j \{ sh[(a + ik)x] + sh[(a + ik)(l_1 - x)] \}}{sh[(a + ik)l_1]} \cdot \frac{1}{(c_j - m_j \omega^2) + (c_{1j} - m_{1j} \omega^2) + ib_{1j} \omega} e^{i\omega t} \quad (37)$$

### Висновки цього дослідження

1. З аналізу отриманих виразів (33), (37) випливає, що при горизонтально направлених коливаннях бетонна суміш, що взаємодіє з поперечними бортами форми, має інерційні, пружні й непружні властивості та її в дискретній динамічній моделі можна представити у вигляді приведеної маси, приведеної жорсткості й коефіцієнта непружного опору.

2. Визначено фізико-механічні характеристики бетонної суміші, які дозволяють урахувати пружні та непружні сили опору й інерційні сили бетонної суміші, що бере участь в коливальному процесі.

3. У викладених теоретичних дослідженнях отримано нові науково обгрунтовані теоретичні дослідження вібраційної касетної установки для формування малогабаритних бетонних виробів горизонтально направленими коливаннями, які в сукупності є істотними для подальшого розвитку і вдосконалення вібраційної техніки та технології виробництва будівельних матеріалів.



## Література

1. Олехнович К.А. Потребительские качества современных виброплощадок / К.А. Олехнович, Ю.И. Виноградов, Н.П. Нестеренко // *Строительные и дорожные машины*. – 1991. – №8. – С.14–16.
2. Нестеренко М.П. Вібраційні площадки з просторовими коливаннями для виготовлення залізобетонних виробів широкої номенклатури / М.П. Нестеренко // *Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво)*. – Полтава: ПолтНТУ, 2005. – Вип. 16. – С. 177–181.
3. Иткин А.Ф. Исследование процесса уплотнения цемента-бетонной смеси на вибрационной площадке с горизонтально направленными колебаниями / А.Г.Маслов, А.Ф. Иткин // *Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету*, вип. 2/2005 (31). – Кременчук: КДПУ, 2005. – с. 76 – 80.
4. Чубук Ю.Ф. Вибрационные машины для уплотнения бетонных смесей / Ю.Ф. Чубук, И.И. Назаренко, В.Н. Гарнец. – К.: Вища школа, 1985. – 168 с.
5. Сівко В.Й. Механічне устаткування підприємств будівельних виробів: – К.: ІСДО, 1994. – 359 с.
6. Сівко В.Й. Деякі питання теорії будівельних матеріалів і сумішей / В.Й. Сівко, М.П. Нестеренко // *Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво)*. – Полтава: ПолтНТУ, 2000. – Вип. 6. – С. 84–89.
7. Лялинов А.Н. Новые вибрационные машины для уплотнения бетонных смесей. – Л.: Ленинградский ДНТП, 1970. – 31 с.
8. Маслов А.Г., Пономарь В.М. Вибрационные машины и процессы в дорожном строительстве. – К.:Будівельник, 1985. – 128 с.
9. Нестеренко М.П. Дослідження характеру взаємодії вертикальних стінок форми з цементобетонною сумішшю при дії горизонтальної складової просторових коливань виброплощадки / М.П. Нестеренко // *Нові технології (Науковий вісник КУЕІТУ)*. – Кременчук: КУЕІТУ, 2009. – №4 (26), – С 153 – 158.
10. Нестеренко М.П. Дослідження зміни коефіцієнта приєднаної маси цементобетонної суміші при горизонтальних коливаннях залежно від її властивостей та умов формування виробів / М.П. Нестеренко // *Науковий вісник будівництва*. – Харків: ХДТУБА – ХОТВ АБУ, 2010. – № 61. – С 184 – 191.
11. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.

Надійшла до редакції 20.11.2012

© О. Г. Маслов, П. О. Молчанов, М. П. Нестеренко

**УДК 666.97.033.16**

*А.Г. Маслов, д.т.н., проф.  
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского  
Н.П. Нестеренко, к.т.н., доц.,  
П.А. Молчанов, ассистент  
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка*

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРА ГОРИЗОНТАЛЬНО НАПРАВЛЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КАССЕТНОЙ УСТАНОВКИ**

*В статье определены рациональные параметры вибрационного уплотнения с учётом возникающего напряженно-деформированного состояния в изделии.*

***Ключевые слова:** бетонная смесь, частота колебаний, кассетная установка, форма.*

**UDC 666.97.033.16**

*O.H. Maslov, Doctor of Technical Sciences, Professor  
Kremenchug National University named in honour of Michael Ostrogradskiy  
M.P. Nesterenko, Ph. D., Associate Professor  
P.O. Molchanov, Assistant  
Poltava National Technical University named in honour of Yuriy Kondratyuk*

## **ANALYTICAL DETERMINATION OF RESONANCE FREQUENCY VIBRATIONS ACTIVE WORKING ORGAN THE CASSETTE FORM**

*The article outlines the rational parameters of vibration compaction based vynykannya stress-strain state in the product.*

***Keywords:** concrete mix, the frequency of oscillations, cluster setup form.*