

*В.Н. Малиновский, к.т.н., доцент
П.В. Кривицкий, аспирант
Брестский государственный технический университет, Республика Беларусь*

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ ПО НАКЛОННЫМ СЕЧЕНИЯМ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ СЖАТИЯ

Рассмотрены методы расчета железобетонных элементов на основе теории полей сжатия. В этих методах для описания напряженно-деформированного состояния сечения, подверженного срезу, используются условия равновесия, совместности деформаций, диаграммы деформирования для арматуры и бетона с диагональными трещинами.

Ключевые слова: железобетонные элементы, срез, деформации, напряжения.

Введение. Концепция классической модели ферменной аналогии впервые была предложена в начале XX века инженерами *W. Ritter* [1] и *E. Mörsch* [2], в первом приближении она рассматривает проблему передачи среза в железобетонном элементе при наличии диагональных трещин. Согласно данной модели в железобетонных элементах с поперечным армированием главные растягивающие напряжения являются причиной появления диагональных трещин, направленных под углом к продольной арматуре. Данные трещины делят бетон на серию диагональных бетонных подкосов, которые подвержены одноосному сжатию. Вместе с продольной арматурой и сжатой зоной бетона балки бетонные подкосы формируют ферменную модель, которая оказывает сопротивление возникающим от внешнего воздействия касательным напряжениям. Для упрощения бетонные подкосы авторами предлагалось направлять под углом 45° к продольной оси элемента.

Обзор последних источников исследований и публикаций. Для уточнения результатов, получаемых по модели ферменной аналогии, в дальнейшем в теорию вносятся три важных дополнения. Первым важным введением, предложенным учеными *P. Lampert* и *B. Thürlimann* [3], является обобщение теории определения угла наклона сжатого бетонного подкоса. Они предположили, что угол может отклоняться от значения 45° . На основе выдвинутой теории исследователи получили основные уравнения равновесия, которые могут объяснить, почему и продольная, и поперечная арматура при различном процентном соотношении может достигать предела текучести при разрушении. Их теория известна как модель ферменной аналогии с переменным углом сжатого подкоса, где пластичность материала предложено считать показателем разрушения. В той связи метод был назван пластической моделью ферменной аналогии.

Второе, не менее важное введение, предложенное профессором *M.P. Collins* [4], – это получение условий совместности деформаций, которые определяют угол наклона бетонного подкоса. В результате угол наклона сжатого подкоса и угол наклона главных сжимающих напряжений и деформаций предложено принимать одинаковыми. Эта теория получила название теории полей сжатия. В то же время автор утверждает, что предложенная теория нераздельна с моделью ферменной аналогии. Положения главных деформаций и напряжений могут быть получены графическим способом путем построения кругов Мора.

Третье введение – открытие эффекта разупрочнения бетона между диагональными трещинами в условиях плоского напряженного состояния, предложенного исследователями *J.R. Robinson* и *J.M. Demorieux*. Количественно описание этого феномена представлено

профессорами *M.P. Collins* и *F.J. Vecchio* [5]. Авторы предложили трансформированную диаграмму деформирования бетона, в которой эффект разупрочнения зависит от соотношения главных растягивающих и сжимающих деформаций.

Выделение не решенных ранее частей общей проблемы. Классическая ферменная модель инженеров *W. Ritter* и *E. Mörsch* является прекрасным инструментом для понимания сути расчета, а выражения, получаемые из условия равновесия, очень просты. К сожалению, результаты по этим выражениям не сходятся с экспериментальными. Расхождение в величине несущей способности с увеличением коэффициентов армирования увеличивается.

Постановка задачи. Результаты применения теории полей напряжений указывают на необходимость более детального анализа системы разрешающих уравнений и уточнения исходных предпосылок в зависимости от напряженного состояния исследуемых конструкций.

Основной материал и результаты

Теория полей сжатия (CFT) М.Р. Collins и D. Mitchell. В 1974 году полученная первоначально для расчета элементов на кручение и дополненная в 1980 году расчетом на срез теория полей сжатия (CFT) является аналитическим методом и основана на уравнениях равновесия, совместности деформаций и связи деформаций и напряжений через соответствующие диаграммы. В разработанном профессорами *M.P. Collins* и *D. Mitchell* [6] методе, базируясь на теории полей растяжения инженера *H. Wagner*, принимается совпадение после образования трещин направлений главных деформаций и напряжений. Основным допущением метода является неучитывание растягивающих напряжений, воспринимаемых бетоном после образования трещин.

В методе CFT уравнения равновесия усилий применительно к модели ферменной аналогии с переменным углом сжатого подкоса (рис. 1) для плоских элементов имеют следующий вид:

$$\sigma_2 = v(\tan \theta + \cot \theta); \quad (1)$$

$$\rho_x \sigma_{sx} = v \cot \theta; \quad (2)$$

$$\rho_y \sigma_{sy} = v \tan \theta, \quad (3)$$

где V – касательные напряжения, вызванные внешней нагрузкой.

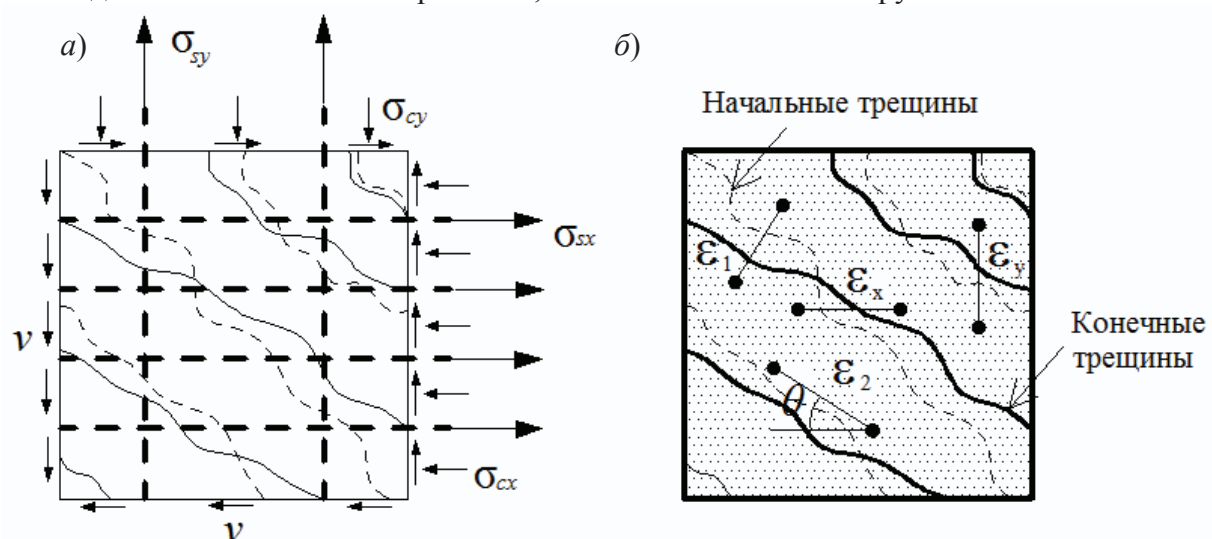


Рисунок 1 – Схема распределение внутренних усилий при срезе (а) и направление деформаций в бетоне с диагональными трещинами (б)

Уравнения совместности деформаций, необходимых для определения угла наклона главных сжимающих напряжений, записываются в виде:

$$\varepsilon_{sx} = \varepsilon_{cx} = \varepsilon_x \text{ и } \varepsilon_{sy} = \varepsilon_{cy} = \varepsilon_y; \quad (4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(\varepsilon_x - \varepsilon_2)}{\tan \theta}; \quad (5)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_y - \varepsilon_2}. \quad (6)$$

Уравнения равновесия усилий, как и уравнения совместности деформаций, получаются путем геометрических преобразований с помощью кругов Мора. Неизменным условием (базисным инвариантом), обеспечивающим взаимосвязь между деформациями, является

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (7)$$

В данном случае в элементе после образования трещин используются средние значения деформаций на участке между несколькими трещинами (рис. 1, а).

Опираясь на собственные экспериментальные исследования, профессор *M.P. Collins* [4] предлагает связь между деформациями и напряжениями для бетонной полосы при сжатии после образования трещин принимать по диаграмме (рис. 2, а), аналитическая зависимость которой имеет вид

$$\sigma_2 = \left(\frac{f'_c}{\varepsilon'_c} \right) \cdot \varepsilon_2 \leq f_{2\max} = \frac{3.6 f'_c}{1 + 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) / \varepsilon'_c}. \quad (8)$$

Уменьшение сопротивления бетонной полосы при сжатии после образования трещин в формуле (8) объясняется влиянием главных растягивающих деформаций, определяемых выражением

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_2 = \varepsilon_x + (\varepsilon_x - \varepsilon_2) \cot^2 \theta. \quad (9)$$

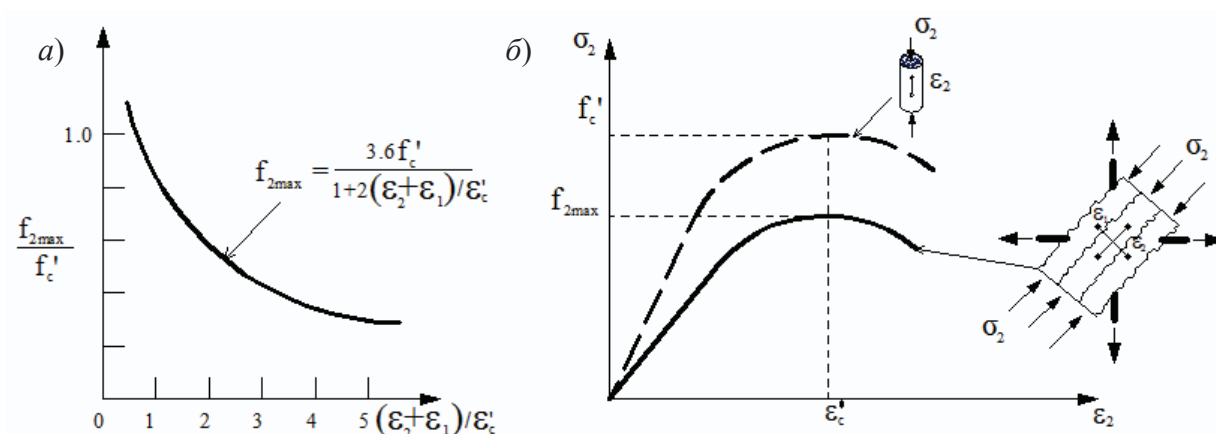


Рисунок 2 – Трансформированные диаграммы деформирования бетона с диагональными трещинами при сжатии

Продолжая исследования, ученые *M.P. Collins* и *F.J. Vecchio* [7] в 1986 году предлагают использовать трансформированную диаграмму деформирования бетона на сжатие после образования трещин (рис. 2, б), описанную следующей выражением:

$$\sigma_2 = f_{2\max} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_c} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right], \quad (10)$$

где $f_{2\max} = \frac{f'_c}{0.8 + 170\varepsilon_1} \leq 1.0$ – предельная прочность бетона при сжатии в

условиях плоского напряженно-деформированного состояния.

Принимая, что в арматуре возникают только продольные напряжения, авторы используют билинейные диаграммы деформирования для описания работы арматуры совместно с бетоном.

Модифицированная теория полей сжатия (МСФТ). Предложенная в 1986 году профессорами университета Торонто *M.P. Collins* и *F.J. Vecchio* [7] модифицированная теория полей сжатия является продолжением разработанного ранее метода *CFT*. Основываясь на фундаментальных положениях *теории полей сжатия (CFT)* и экспериментально полученной верифицированной трансформированной диаграмме деформирования, авторы предлагают учитывать растягивающие напряжения в бетоне между наклонными трещинами (рис. 3, а и б).

Основные допущения и предпосылки метода:

- 1) каждому деформированному состоянию (сечение 1-1 и 2-2, рис. 3, а) соответствует только одно напряженное состояние;
- 2) в расчетах используются средние значения деформаций и напряжений, определяемые на участке между несколькими трещинами;
- 3) направления главных деформаций и главных напряжений совпадают.

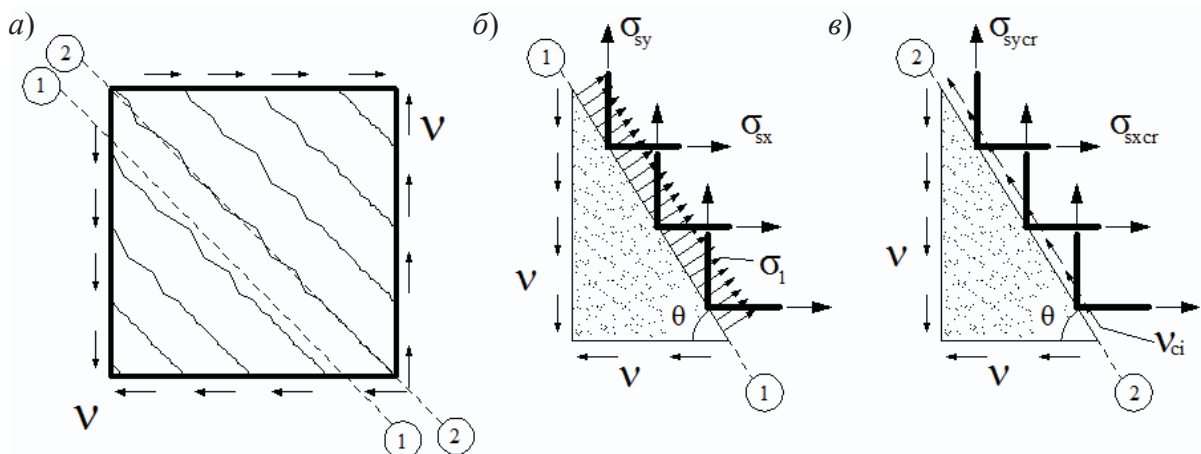


Рисунок 3 – Плоский элемент, воспринимаемый «чистый сдвиг» (а), распределение внутренних усилий в сечениях 1-1 (б) и 2-2 (в)

С учетом вышесказанного уравнения равновесия усилий для сечения 1-1 (рис. 3, а и б), определяемые с помощью круга Мора (рис. 4), имеют следующий вид:

$$\sigma_2 = v(\tan \theta + \cot \theta) - \sigma_1; \quad (11)$$

$$\rho_x \sigma_{sx} = v \cot \theta - \sigma_1; \quad (12)$$

$$\rho_y \sigma_{sy} = v \tan \theta - \sigma_1, \quad (13)$$

где V – касательные напряжения, определяемые аналогично методу *CFT*.

До образования трещин (при $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_{cr}$) для описания работы бетона на растяжение авторы предлагают использовать линейную зависимость

$$\sigma_1 = E_c \cdot \varepsilon_1, \quad (14)$$

а после образования трещин (при $\varepsilon_1 > \varepsilon_{cr}$) в бетонном подкесе учитываются растягивающие напряжения, изменяющиеся по зависимости (рис. 5,а)

$$\sigma_1 = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{200 \cdot \varepsilon_1}}. \quad (15)$$

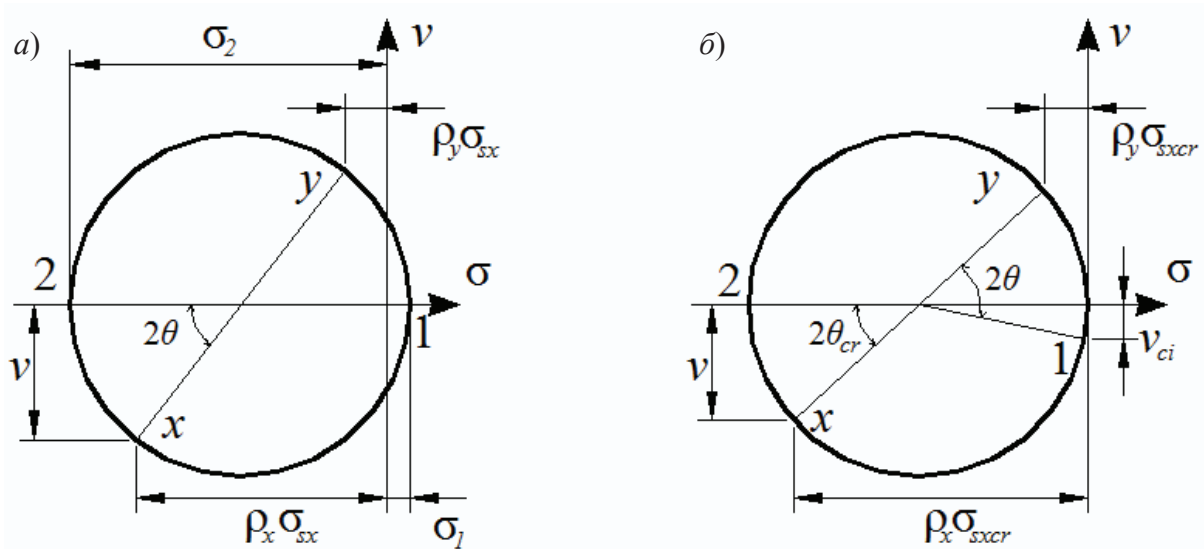


Рисунок 4 – Круги Мора для определения напряжений в сечениях, проходящих по бетонной полосе (а) и по трещине (б)

Позднее, в 1991 году *M.P. Collins* и *D. Mitchell* [8] предложили средние растягивающие напряжения после образования трещин (рис. 5, б) определять по выражению

$$\sigma_1 = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{500 \cdot \varepsilon_1}}, \quad (16)$$

где $f_{cr} = 0,33\sqrt{f'_c}$.

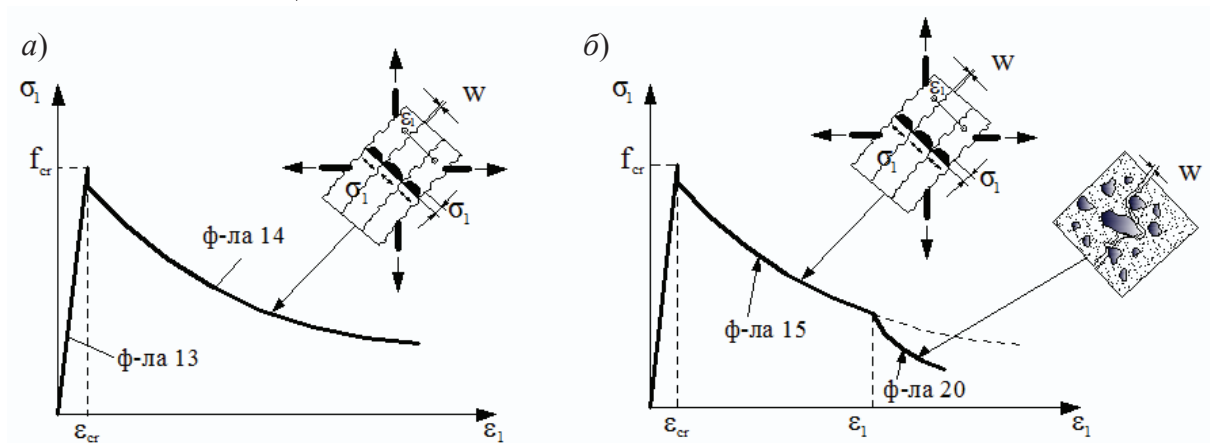


Рисунок 5 – Диаграммы деформирования бетона с диагональными трещинами при растяжении

Аторы считают, что разрушение элемента может происходить не только от действия главных растягивающих напряжений по сечению 1-1, но также за счет локальных напряжений, действующих в трещине, по сечению 2-2 (рис. 3, а, в). Для составления уравнений равновесия рассматривается идеализированная модель как серия параллельных трещин, направленных под углом θ к продольной оси со средним шагом $S_{m\theta}$. Уравнения равновесия в сечении, проходящем через наклонную трещину (сечение 2-2), выглядят следующим образом:

$$\rho_x \sigma_{sxcr} = v \cot \theta + v_{ci} \cot \theta; \quad (17)$$

$$\rho_y \sigma_{sy-cr} = v \tan \theta - v_{ci} \tan \theta, \quad (18)$$

где v_{ci} – касательные напряжения, возникающие вдоль диагональной трещины за счет зацепления по берегам трещины.

В 1986 году *M.P. Collins* и *F.J. Vecchio* [7], опираясь на экспериментальные исследования *J.C. Walraven*, определили предельное значение касательных напряжений v_{ci} (рисунок 5б), которое с учетом упрощений, предложенных в 1989 году *M.P. Collins* и *S.B. Bhide* [9], получили следующую зависимость:

$$v_{ci} = \frac{0.18 \sqrt{f'_c}}{0.3 + \frac{24w}{a+16}}, \quad (19)$$

где $w = \varepsilon_1 \cdot S_{m\theta}$ – ширина раскрытия трещин.

Средний шаг трещин определяется по зависимости

$$S_{m\theta} = 1 / \left(\frac{\sin \theta}{S_{mx}} + \frac{\cos \theta}{S_{my}} \right), \quad (20)$$

где S_{mx} , S_{my} – расчетный шаг трещин в продольном и поперечном направлениях соответственно.

В реальных конструкциях средние напряжения в поперечной арматуре при действии значительных нагрузок достигают предела текучести, и тогда выражения (13) и (18) эквивалентны при выполнении условия

$$\sigma_1 \leq v_{ci} \cdot \tan \theta = \frac{0.18 \sqrt{f_{cr}}}{0.3 + \frac{24w}{a+16}} \cdot \tan \theta. \quad (21)$$

Зависимость (20) ограничивает средние главные напряжения в бетоне с трещинами, чтобы разрушение элемента происходило по механизму зацепления по берегам трещин, который заложен в методе *MCFT*.

Модель переменного угла (RA-STM) Thomas T.C. Hsu и др. В начале 90-х годов прошлого века в университете Хьюстона под руководством профессора *T. T. C. Hsu* [10–12] были получены зависимости, которые позволяют учитывать растягивающие напряжения в диагональных трещинах. На основании данных зависимостей была предложена модель переменного угла (*RA-STM*). В предложенной модели, как и в методе *MCFT*, в бетоне сразу же после образования трещин площадки главных напряжений и деформаций параллельны и направлены под углом α (рис. 6), а при увеличении поперечной силы, вследствие возрастания касательных напряжений, этот угол будет уменьшаться. По этой причине расчетная модель наклонного сечения получила название модели переменного угла.

В рамках данного метода условия равновесия определяются по кругу Мора, учитывая принцип суперпозиции напряжений в бетоне и арматуре (рис. 6), при этом принимается, что арматура воспринимает только продольные напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha + \rho_x \cdot \sigma_{sx}; \quad (22)$$

$$\sigma_y = \sigma_2 \sin^2 \alpha + \sigma_1 \cos^2 \alpha + \rho_y \cdot \sigma_{sy}; \quad (23)$$

$$v_{xy} = (\sigma_2 - \sigma_1) \cdot \sin \alpha \cos \alpha, \quad (24)$$

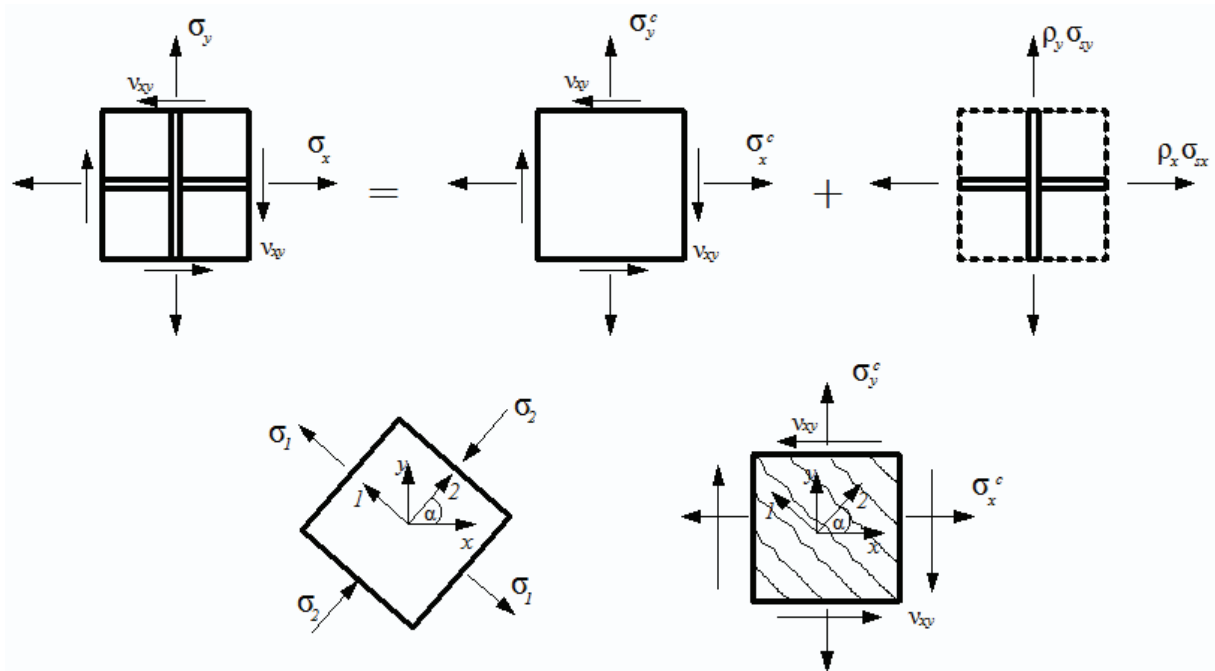


Рисунок 6 – Направление и распределение напряжений в железобетонном элементе по модели переменного угла

где σ_x, σ_y – нормальные напряжения в направлении осей x и y (положительные для растяжения);

v_{xy} – касательные напряжения в координатах x - y (положительные, как показано на рисунке 6);

σ_2, σ_1 – главные напряжения в направлении осей 2 и 1 (положительные для растяжения);

α – угол между осями 2 и x ;

ρ_x, ρ_y – коэффициент армирования по осям x и y ;

σ_{sx}, σ_{sy} – напряжения, возникающие в арматуре, расположенной в направлении осей x и y .

Для составления условий совместности деформирования используются значения средних деформаций, тогда условия совместности деформирования имеют следующий вид:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_2 \cos^2 \alpha + \varepsilon_1 \sin^2 \alpha; \quad (25)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_2 \sin^2 \alpha + \varepsilon_1 \cos^2 \alpha; \quad (26)$$

$$\gamma_{xy} = 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \cdot \sin \alpha \cos \alpha, \quad (27)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – средние деформации в направлении осей x и y (положительные для растяжения);

γ_{xy} – средние сдвиговые деформации в координатах x - y ;

$\varepsilon_2, \varepsilon_1$ – средние главные деформации в направлении осей 2 и 1 (положительные для растяжения);

Ученые *T. T. C. Hsu* и *A. Belarbi*, основываясь на результатах собственных испытаний плоских панелей, в 1994 году предложили описанную формулой (27) диаграмму деформирования, характеризующую работу бетона на растяжение после образования диагональных трещин (рис. 7, а),

$$\sigma_1 = \frac{0.31\sqrt{f'_c}}{(12500 \cdot \varepsilon_1)^{0.4}} \text{ при } \varepsilon_1 > 0.00008. \quad (28)$$

По формуле (28) величина главных растягивающих напряжений с увеличением внешней нагрузки увеличивается быстрее, чем значения напряжений, определяемые по формуле (16), используемой в *MCFT*.

В 1995 году ученые *T.T.C. Hsu* и *A. Belarbi* также предложили трансформированную диаграмму деформирования, характеризующую работу бетона на сжатие с диагональными трещинами, которая схожа с диаграммой, используемой в методе *MCFT*. Авторы допускают, что при пропорциональном нагружении можно приравнять коэффициент разупрочнения деформаций $\zeta_{\varepsilon 0}$ и коэффициент разупрочнения напряжений $\zeta_{\sigma 0}$. С учетом упрощения диаграмма деформирования бетона на сжатие с диагональными трещинами при коэффициентах разупрочнения $\zeta_{\varepsilon 0} = \zeta_{\sigma 0} = \zeta = 0.9 / \sqrt{1 + 400\varepsilon_1}$ представлена на рисунке 7, б.

В отличие от метода *MCFT*, где проверяются условия для местных напряжений, возникающих в трещине, в модели *RA-STM* используется диаграмма деформирования арматуры для средних деформаций и напряжений, а это оправдывает возможность учета местной текучести арматуры в трещине. Диаграмму деформирования для арматуры (рис. 8) предлагается описывать по выражениям:

$$\text{при } \varepsilon_s \leq \varepsilon_n \quad \sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s; \quad (29)$$

$$\text{при } \varepsilon_s > \varepsilon_n \quad \sigma_s = f_y \left[(0.91 - 2B) + (0.02 + 0.25B) \frac{E_s}{f_y} \varepsilon_s \right] \cdot \left[1 - \frac{2 - \alpha_2 / 45^0}{1000\rho} \right], \quad (30)$$

$$\text{где } \varepsilon_n = \frac{E_s}{f_y} \cdot (0.91 - 2B) \cdot \left[1 - \frac{2 - \alpha_2 / 45^0}{1000\rho} \right] \text{ и } B = \left(\frac{f_{cr}}{f_y} \right)^{1.5} / \rho;$$

ρ – коэффициент армирования;

α_2 – угол наклона первой диагональной трещины.

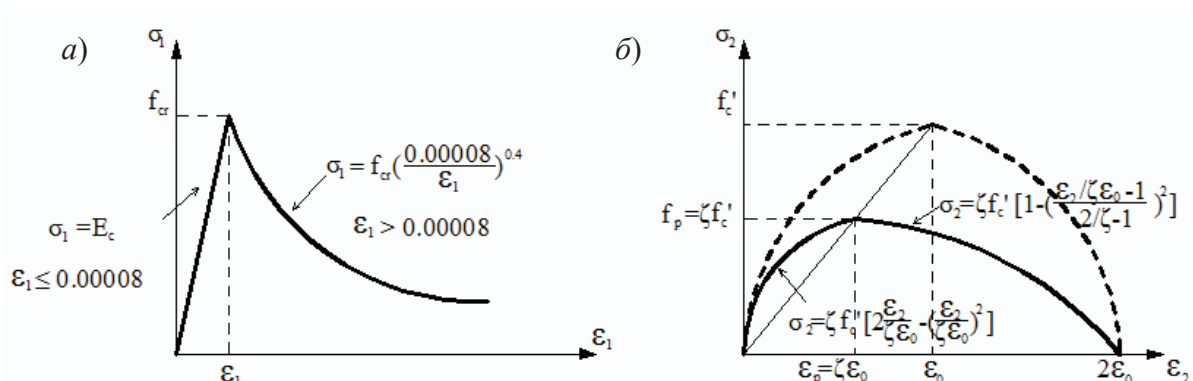


Рисунок 7 – Диаграммы деформирования бетона с диагональными трещинами при растяжении (а) и сжатии (б)

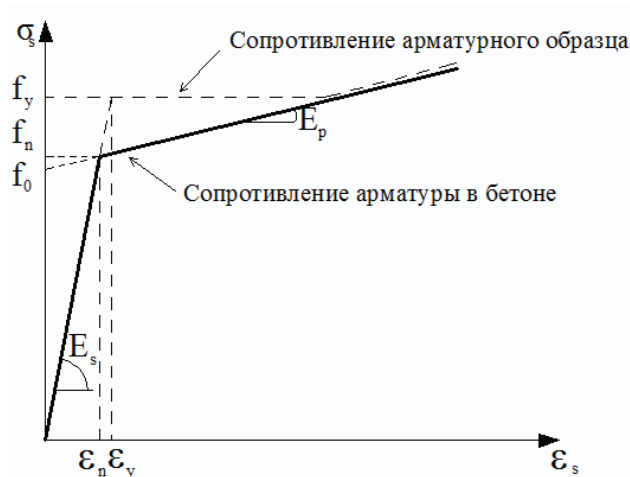


Рисунок 8 – Диаграмма деформирования «мягкой» арматуры

Испытав 13 образцов панелей в условиях плоского напряженного состояния, T.T.C. Hsu и X.B. Pang определили границы применимости модели RA-STM, где угол наклона прогнозируемой трещины должен находиться в пределах $33^{\circ} \leq \theta \leq 57^{\circ}$. За границами этого интервала авторы рекомендуют использовать модель фиксированного угла (FA-STM).

Величина несущей способности, получаемой по модели FA-STM, схожа с результатами по методу MCFT для элементов с низким коэффициентом армирования, а с увеличением коэффициента армирования расхождение увеличивается. При этом модель FA-STM не учитывает составляющую по бетону при срезе, допуская, что угол наклона трещины совпадает с направлением главных напряжений в бетоне, и объясняется это исчезновением касательных напряжений в трещине.

Выводы. Комбинация условий равновесия, совместности деформаций и применение трансформированных диаграмм деформирования для бетона позволили получить теорию, которая дает с хорошей точностью результаты в сравнении с экспериментальными данными. Учет растягивающих напряжений в бетоне между наклонными трещинами в моделях MCFT и FA-STM дает более четкое представление о работе бетона в условиях плоского напряженного состояния. Введение составляющей бетона за счет зацепления по берегам наклонной трещины в модели MCFT предоставляет возможность получить фактическую несущую способность железобетонного элемента при срезе.

Литература

1. Ritter, W. Die bauweise hennebique / W. Ritter // Schweizerische Bauzeitung. – 1899. – V. 33. – № 7. – P. 59–61.
2. Mörsch, E. Concrete-Steel Construction / E. Mörsch // McGraw-Hill (English translation by E. P. Goodrich). – New York, 1909.
3. Lampert, P. and Thurlimann, B. «Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending» // IABSE. – 1971. – No. 31-I. – P. 107–131.
4. Collins, M. P. Toward a Rational Theory for RC Members in Shear / Journal of Structural Division, ASCE. – 1978. – V. 104. – No. 4. – P. 649–666.
5. Vecchio, F. Stress-Strain Characteristics of Reinforced Concrete in Pure Shear / F. J. Vecchio, M. P. Collins // Final Report, IABSE Colloquium on Advanced Mechanics of Reinforced Concrete. – Delft, 1981. – P. 211–225.
6. Mitchell, D. Diagonal Compression Field Theory – A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion / D. Mitchell, M. P. Collins // ACI JOURNAL, Proceedings. – 1974. – V. 71. – P. 396–408.

7. Vecchio, F. J. M. P. *The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear* / F. J. Vecchio, M. P. Collins // *ACI JOURNAL, Proceedings*. – 1986. – Mar.–Apr., V. 83. – No. 2. – P. 219–231.
8. Collins, M. P. *Prestressed Concrete Structures* / M. P. Collins, D. Mitchell // Prentice-Hall. – Englewood Cliffs, N.J., 1991.
9. Bhide, S. B. *Influence of Axial Tension on the Shear Capacity of Reinforced Concrete Members* / S. B. Bhide, M. P. Collins // *ACI Structural Journal*. – 1989. – Sept.–Oct., V. 86. – No. 5. – P. 570–581.
10. Belarbi, A. *Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete* / A. Belarbi, T. T. C. Hsu // *ACI Structural Journal*. – 1994 – July–Aug., V. 91. – No. 4. – P. 465–474.
11. Belarbi, A. *Constitutive Laws of Softened Concrete in Biaxial Tension-Compression* / A. Belarbi, T. T. C. Hsu // *ACI Structural Journal*. – 1995. – Sept.–Oct., V. 92. – No. 5. – P. 562–573.
12. Pang, X.-B. D. *Behavior of Reinforced Concrete Membrane Elements in Shear* / X.-B. D. Pang, T. T. C. Hsu // *ACI Structural Journal*. – 1995. – Nov.–Dec., V. 92. – No. 6. – P. 665–679.

В.Н. Малиновський, к.т.н., доцент
П.В. Кривицький, аспірант
Брестський державний технічний університет, Республіка Біларусь

МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ МІЦНОСТІ ЗА ПОХИЛИМИ ПЕРЕРІЗАМИ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ПОЛІВ СТИСКАННЯ

Розглянуто методи розрахунку залізобетонних елементів на основі теорії полів стискання. У таких методах для опису напружено-деформованого стану перерізу, який знаходиться в умовах зрізу, використовуються умови рівноваги, сумісності деформацій, діаграми деформування для арматури і бетону з діагональними тріщинами.

Ключові слова: залізобетонні елементи, зріз, деформації, напруження.

V.N. Malinovskyi, Ph.D.
P.V. Krivitskiy, postgraduate st.
Brest State Technical University, Belarus

SHEAR DESIGN METHODS OF REINFORCED CONCRETE MEMBRANES BASED ON COMPRESSION FIELDS THEORY

Design methods of reinforced concrete members based on compression fields theory are presented. With these methods, equilibrium conditions, compatibility conditions, and stress-strain relationships for both the reinforcement and the diagonally cracked concrete are used to account the load-deformation response of a section subjected to shear.

Keywords: reinforced concrete elements, shear, strain, stress

Надійшла до редакції 11.09.2014
© В.Н. Малиновський, П.В. Кривицький